Ben-Alexander Bohnke

NEUE LOGIK

Einführung in die Integrale Logik

Aussagen-Logik	$A \rightarrow B$
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik	$Fx_n \rightarrow Gx_n$
Quantitäts-Logik	$p(X \rightarrow Y) = r/n$
Integral-Logik	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n$

Eine *neue* Logik – INTEGRALE LOGIK

Das Buch „Neue Logik“ behandelt die Hauptgebiete der Logik wie *Aussagen*-Logik, *Prädikaten*-Logik und *Quantoren*-Logik, zusätzlich Spezial-Logiken wie die *Modal*-Logik. Dabei werden diese Logiken diskutiert, kritisiert und weiterentwickelt. Grundlegend ist hierfür die Unterscheidung von *synthetischen* und *analytischen* Relationen bzw. Aussagen.

Neu führt der Autor eine *quantitative* Logik ein. Hier werden logische Relationen innerhalb der *Wahrscheinlichkeits-Theorie* quantifiziert, mittels *empirischer* sowie *theoretischer* Wahrscheinlichkeit. Man kann berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Relation aus einer anderen folgt und so den *Grad* eines logischen Schlusses bestimmen.

Im Einzelnen behandelt der Autor:
klassische – nicht klassische Logik / qualitative – quantitative Logik /
deduktive – induktive Logik / deterministische – statistische Logik /
extensionale – intensionale Logik.

Insgesamt bietet das Buch ein innovatives, selbstständiges *System* der Logik. So begründet sich auch der eigene Name „Integrale Logik“, im Sinne von *ganzheitlicher Logik*. Denn diese Logik *integriert* verschiedene Logiken.

Der Text ist großenteils auch für *Nicht-Logiker* zu lesen, da er sich auf die *Grundstrukturen* der Logik konzentriert und immer wieder Beispiele in Alltagssprache gibt. Manche Passagen des Buches sind dagegen *Forschungsberichte* und wenden sich an *Fachleute*. – Die „Neue Logik“ ist eine überarbeitete und gestraffte Fassung des Buches „Integrale Logik“.

Ben-Alexander Bohnke (M. A.) ist freier Wissenschaftsautor, vor allem für philosophische, psychologische und ganzheitliche Themen. Als Nachkomme von Moses Mendelssohn philosophisch vorgeprägt, studierte er Philosophie, außerdem Linguistik, Soziologie und Psychologie in Köln. Bisher 12 Buchveröffentlichungen im In- und Ausland.

Kontakt: **Ben-Alexander.Bohnke@t-online.de**

ISBN 978-3-00-024415-5

VORWORT (aus: Ben-Alexander Bohnke - Neue Logik 2008)

0) KONZEPTION

Das Buch „Neue Logik“ gibt eine *ganzheitliche* und *systematische* Darstellung der Logik. Der Text geht aus von bekannten Theorien der *Logik*, aber auch der *Mengenlehre* und *Statistik*. Er entwickelt daraus jedoch neue und integrierende Modelle und Theorien.

Die Arbeit zielt einerseits auf die allgemeinen, *fundamentalen Strukturen* und *Gesetze* der Logik, nicht auf spezialisierte Kalküle. Andererseits zielt sie vor allem auf Diskussion, Erweiterung und Modifikation herkömmlicher Logik. Es geht mir weniger darum, bekannte logische Theoreme, Beweis- oder Ableitungsverfahren, die in vielen Lehrbüchern ausgezeichnet dargestellt sind, noch einmal zu wiederholen. Daher besteht auch keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, ich verstehe mein Buch mehr als Ergänzung zu anderen Logik-Darstellungen.

Außerdem ist mir – neben der *Grundlagenforschung* – auch der *Praxisbezug* wichtig, anders, als dies in der reinen Logik geschieht. So stelle ich, durch viele Beispiele, immer wieder Bezüge zu unserem *alltäglichen Denken* und Sprechen her. Ebenso geht es mir um neue – deduktive und induktive – *Schlussverfahren*, die in Wissenschaften und Wissenschaftstheorie angewendet werden können; sie wären sicherlich auch für eine Umsetzung in Programmiersprachen und damit für den Einsatz am *Computer* geeignet.

Die *Formalisierung* wird so einfach wie möglich gehalten. Denn oft verschwindet hinter einem „bürokratischen“ Formelapparat das Wesentliche der Logik. Entsprechend wird hier auf einen streng axiomatischen Aufbau verzichtet. Auch Syntax bzw. Grammatik der Logik spielen eine untergeordnete Rolle.

Dasselbe gilt für die *statistischen* Ausführungen. Natürlich ist es wichtig, wenn in der Statistik z. B. verschiedene, mathematisch aufwendige *Korrelations-Koeffizienten* eingeführt werden. Aber was Korrelation eigentlich bedeutet oder noch grundsätzlicher, was *quantitativ* gegenüber *qualitativ* überhaupt bedeutet, solche Klärungen und Erörterungen sucht man im Statistik-Buch meist vergeblich. Diese grundsätzlichen Erklärungen zu liefern, in Logik wie Statistik, sehe ich als eine Aufgabe meines Buches.

1) BEGRIFF

Der Begriff der Logik wird sehr unterschiedlich definiert. Ich verstehe die Logik vorrangig als ein *System funktionaler Abhängigkeiten bzw. Relationen*. Meinen speziellen Ansatz nenne ich „*Integrale Logik*“. Denn er *integriert* und vereinheitlicht verschiedene Logiken, von *traditioneller Logik* bis zu *post-klassischen* Ansätzen. Insgesamt bedeutet die Integrale Logik ein neues, ganzheitliches *Logik-System*, was einen eigenen Namen rechtfertigt. Der Name signalisiert auch, dass die Suche nach den *logischen Fundamenten* einer Gralssuche ähneln kann.

Dieses System beinhaltet in erster Linie eine *philosophische* Logik, aber ebenfalls eine *mathematische* Logik. Allerdings wird die mathematische Logik öfters sehr speziell definiert, z. B. durch die Teilgebiete Mengenlehre, Beweistheorie, Modelltheorie und Rekursionstheorie. Dagegen meine ich hier mit mathematischer Logik vorrangig eine *quantitative*, *wahrscheinlichkeitstheoretische* Logik, die eine wesentliche Rolle in meinem Ansatz spielt.

Die *Quantitäts-Logik* umfasst eine *deduktiv-deterministische* und eine *induktiv-statistische* Komponente. Meine Logik-Quantifizierung unterscheidet sich wesentlich von der bekannten *Fuzzy Logik*, könnte die aber ergänzen.

Der Text soll einerseits abgegrenzt werden gegen Ontologie, Sprachanalyse bzw. Analytische Philosophie und Sprachphilosophie. *Ontologische* und *sprachphilosophische* Fragen bzw. Probleme der Logik werden nur soweit notwendig behandelt. Diese sollen in einem (sich in Vorbereitung befindenden) Buch über Philosophie ausführlich gewürdigt werden.

Ebenso grenzt sich mein Logik-Buch ab gegen *Statistik* und *Stochastik*. Zwar ist es mir gerade ein Anliegen, eine *Brücke zwischen Logik und Statistik* als zu schlagen – wobei die *Wahrscheinlichkeitstheorie* die Überbrückung leistet –, aber es bleibt eben primär ein Buch über Logik, gleichermaßen über *klassische* wie *nicht-klassische* Logik.

2) ENTSTEHUNG

Meine Überlegungen zur *Integralen Logik* gehen viele Jahre zurück. Im Laufe der Zeit arbeitete ich dieses Modell in mehreren Etappen immer weiter aus.

Daraus entstand zunächst das Buch: „INTEGRALE LOGIK – ein neues Modell philosophischer und mathematischer Logik“ (1. Aufl. Februar 2008, ISBN: 978-3-00-023632-7).

Das vorliegende Buch „NEUE LOGIK“ ist eine überarbeitete, vor allem aber stark gestraffte Fassung des über 800-seitigen Werkes „INTEGRALE LOGIK“. Beide Bücher sind über den Buchhandel oder beim Autor erhältlich: E-Mail: Ben-Alexander.Bohnke@t-online.de

Der Text basiert selbstverständlich auf der Literatur über die etablierte Logik. Später habe ich mich dann mit neuen, auch *nicht-klassischen* Logikmodellen auseinandergesetzt, wie Supervaluationstechnik, Parakonsistente Logik, Mehr-wertige Logik, Intuitionistische Logik, Freie Logik, Konstruktive Logik, Pac-Modell, Fuzzy Logik usw. Da aber meine Aussagen bzw. Neuerungen im Wesentlichen auf eigenen Analysen beruhen und zur Ausbildung eines eigenständigen *Logik-Systems* geführt haben, verzichte ich weitgehend auf eine Literaturdiskussion. Allerdings auch, um den Umfang des Buches nicht noch weiter auszudehnen.

3) LESER

Das Buch „Integrale Logik“ zielt einerseits auf Menschen, die eine anspruchsvolle *Einführung* in die Logik suchen. Denn es ist sehr systematisch aufgebaut und verwendet so weit möglich eine verständliche Sprache. Entsprechend verzichtet es auf überflüssige und unübersichtliche Formalisierungen bzw. auf eine streng technische und axiomatische Darstellung.

Andererseits richtet sich das Buch an *Logik-Experten*, da es verschiedene innovative Analysen enthält, mit m. W. noch nirgends veröffentlichten Ergebnissen, insbesondere neuen Logik-Formeln. Manche Problem-Diskussionen sind ausschließlich für Fachleute gedacht, sie sind meistens unter dem Punkt „Erweiterungen“ zu finden (ausführlicher allerdings in dem ersten Buch „Integrale Logik“).

Anders gesagt: Der Text besitzt Aspekte verschiedener *Arten von Büchern*. In seiner Systematik hat er etwas von einem *Lehrbuch*. Da er wenig an Kenntnissen voraussetzt, hat er etwas von einer *Einführung*. Außerdem enthält der Text viele neue logische Ansätze. Nicht jeder dieser Ansätze ist bereits vollständig ausgearbeitet und gesichert. Hier stehen noch weitere Forschungen aus, und insofern ist mein Buch – auch – ein *Forschungsbericht*.

4) BESONDERHEITEN UND NEUERUNGEN DES BUCHES

1. eine systematische und *einheitliche Darstellung* bzw. Vereinigung verschiedener Logiken, z. B. Aussagen-Logik, Prädikaten-Logik, Quantoren-Logik und Klassen-Logik
2. eine – doppelte – *Quantifizierung der synthetischen Logik* (die nicht auf der Fuzzy-Logik beruht), mittels empirischer und theoretischer Wahrscheinlichkeit
3. eine – doppelte – *Quantifizierung logischer Schlüsse* und anderer analytischer Relationen, mittels Wahrscheinlichkeitstheorie, innerhalb einer *induktiven-deduktiven* Logik
4. eine Beschreibung *semi-analytischer Relationen* als Mittelglied zwischen synthetischen und analytischen Relationen
5. eine *Modal-Logik*, welche vollständig auf Quantoren- bzw. Quantitäts-Logik zurückgeführt wird.

Konsequent *neue Ideen* haben es zunächst schwer, Anerkennung zu finden, gerade in Wissenschaft und Philosophie. Erst recht, wenn diese Ideen als *System* präsentiert werden, denn in der heutigen Philosophie besteht vielfach ein Misstrauen gegenüber *philosophischen Systemen*. Diese Haltung ist aber eher anachronistisch. Denn die *Systemtheorie*, welche die Welt und ihre Bereiche als Systeme beschreibt, in allgemeiner oder spezieller Form, ist heute die wichtigste und fortschrittlichste Theorie. Ebenso ist es ein Vorteil, wenn eine *Theorie selbst* als System aufgebaut und dargestellt wird. Insofern verstehe ich mein Buch – vom Inhalt und von der Form her – auch als Beitrag zu einer (logischen) Systemtheorie.

5) INHALTS-AUFBAU

Bei der Darstellung wird großer Wert auf *Systematik* gelegt. Das zeigt sich auch in der Bevorzugung eines *5er*-Systems, d. h. einer Unterteilung des Textes in jeweils 5 Punkte (ggf. auch 6 Punkte, wenn nämlich die 0 mitgezählt wird). Diese 5er-Unterteilung hat aber vorwiegend pragmatische und lerntheoretische Gründe, dahinter steht keine besondere Ontologie. Der Text ist entsprechend systematisch in folgende *Kapitel* unterteilt:

- 0 Grundlagen
- 1 Logik *synthetischer* Relationen
- 2 Logik *analytischer* Relationen
- 3 *Meta*-Logik *synthetischer* Relationen
- 4 *Meta*-Logik *analytischer* Relationen
- 5 System

Dabei sind die *Kapitel* 1 bis 4 gleich unterteilt, in die *Unterkapitel*:

- 1-1 Aussagen-Logik (bzw. 2-1, 3-1, 4-1)
- 1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik
- 1-3 Quantitative Logik
- 1-4 Quantitative Aussagen-Logik
- 1-5 Quantitative Quantoren-Logik

Auch diese *Unterkapitel* sind gleich unterteilt, in die *Unterpunkte*:

- 1-1-1 Einführung
- 1-1-2 Implikation
- 1-1-3 Positiv-Implikation
- 1-1-4 Systematik
- 1-1-5 Erweiterungen

So steht z. B. „**1**-1 Aussagen-Logik“ für *Synthetische Relationen* in der Aussagen-Logik, aber „**2**-1 Aussagen-Logik“ für *Analytische Relationen* in der Aussagen-Logik.

Normalerweise wird noch eine in vierte Ebene unterteilt, also in Kap. 1: 1-1-1-1 bis 1-5-5-5; in manchen Unterkapiteln geht die Differenzierung aber nur bis Ebene drei, also z. B. 1-1-1.

ÜBERBLICK

Der Überblick gibt – in äußerster Knappheit – für Kapitel 0 bis 4 (entsprechend deren Gliederung) wichtige Inhaltshinweise oder eine exemplarische Demonstration. Da das Kapitel 5 nur Tabellen, Formeln bzw. selbst Übersichten enthält, ist es in diesem Überblick nicht erfasst.

0 GRUNDLAGEN DER LOGIK

Im Punkt „Grundlagen“ werden logische, aber auch *sprachphilosophische* und *ontologische* „Essentials“ dargestellt, durchaus schon in Erweiterung der herkömmlichen Logik.

0-1 Logik-Modelle

Hier werden Modelle der Logik vorgestellt, d. h. verschiedene Theorien, was Logik ist, wie sie begründet werden kann usw. Ich sehe die Logik in erster Linie als Wissenschaft von der *formalen Welt*, insbesondere als Theorie *funktionaler Relationen*, wobei logische Gesetze als ewige Wahrheiten verstanden werden können (wenn auch nicht müssen).

Ein besonderes Verhältnis besteht zwischen *Logik* und *Sprache*, wobei der Gegensatz „logische Sprache – natürliche Sprache“ und der Gegensatz „logische Grammatik – sprachwissenschaftliche Grammatik“ auseinander zu halten sind; so kann man z. B. auch die natürliche Sprache mittels der logischen Grammatik analysieren.

Eine wichtige Unterscheidung in diesem Zusammenhang ist die zwischen *Objekt-Sprache* und *Meta-Sprache*: in der Objekt-Sprache spricht man über (reale) *Objekte*, in der Meta-Sprache spricht man über *Sprache*, z. B. über Zeichen.

0-2 Logik-Komponenten

Man kann *erstens* vor allem drei *Ansätze* der Logik unterscheiden: einen *realistischen*, einen *linguistischen* und einen *psychologischen*. Je nach Ansatz besitzt die Logik unterschiedliche *Komponenten*:

- *reale* Komponenten: Individuen, Mengen bzw. Klassen, Sachverhalte, Ereignisse
- *sprachliche* Komponenten: Wörter bzw. Prädikate, Sätze bzw. Aussagen
- *psychische* Komponenten: Denk-Begriffe, Urteile oder Gedanken usw.

Der psychologische Ansatz wurde vorwiegend in der *traditionellen Logik* – als „Lehre vom folgerichtigen Denken“ – vertreten; die *moderne Logik* ist primär „linguistisch“ orientiert, geht von Aussagen bzw. Sätzen und anderen Spracheinheiten aus. Diese sprachliche Deutung hat in bestimmten Anwendungen ihre pragmatischen Vorteile, ich halte es aber überwiegend für günstiger, von *realen* Komponenten auszugehen. Allerdings, für die Logik ist es nach meiner Überzeugung grundsätzlich gleichgültig, auf welche Komponenten man sie anwendet.

Daher geht man am besten von einer *neutralen* Interpretation aus, die jedoch der *realistischen* Interpretation am nächsten steht. Hier konzentriert man sich primär auf *Relationen*, Beziehungen zwischen *Objekten* und *Eigenschaften* (als Relata). Und zwar geht es um der Logik um *korrelative* Relationen, diese bestehen nur in „funktionalen Abhängigkeiten“, im gemeinsamen gültig oder ungültig sein, unabhängig von Raum, Zeit, Materie usw. Die Relationen werden insbesondere durch Symbole der *Logik* (Junktoren) und der *Mengenlehre* dargestellt. Logische Relationen können *Aussagen*, *Sachverhalte* oder *Urteile* repräsentieren.

Es werden *zweitens* herkömmlich verschiedene *Arten* der Stufen von Logik unterschieden, z. B. in der linguistischen, meta-sprachlichen Diktion *Aussagen*-Logik, *Prädikaten*-Logik, *Quantoren*-Logik u. a. Nach meiner Auffassung liegen die Unterschiede in diesen Logiken ebenfalls nicht primär in dem Ansatz oder in der Art der Komponenten, sondern im Grad der (expliziten oder impliziten) *Quantifizierung*. So gilt:

- *Aussagen-Logik*: 2-wertig, enthält nur die Werte 0 und 1
- *Quantoren-Logik*: normalerweise 4-wertig: Werte 1, < 1, 0, > 0

- *Prädikaten-Logik*: kann man als *implizit* ∞-wertige Logik interpretieren, wobei die Werte alle im Intervall von 0 bis 1 liegen, also: $\geq 0 \wedge \leq 1$

Es lässt sich entsprechend auch eine, auf *Wahrscheinlichkeitstheorie* basierende, *quantitative Logik* einführen, die – *explizit*, also numerisch – mit infiniten Werten p zwischen 0 und 1 arbeitet: $0 \leq p \leq 1$. Die Entwicklung dieser Quantitäts-Logik ist ein Schwerpunkt des Buches.

0-3 Extension und Intension

Dies ist eine zentrale Unterscheidung in der Logik sowie in der Sprachphilosophie und Semantik. Die *Extension* bzw. *Intension* sind die wichtigsten Formen von *Bedeutung* bzw. Bezeichnung. Zusammenfassend kann man sagen:

Bei Wörtern, Zeichen gilt: Die Extension sind *Objekte*, Individuen oder Klassen, die Intension sind die definierenden, wesentlichen *Begriffe* bzw. Eigenschaften; allerdings darf man nicht die Extension mit den *realen Objekten* gleichsetzen, es geht um *abstrakte Klassen* bzw. abstrakte Individuen.

Bei Sätzen gilt: Die Extension ist ein *Sachverhalt*, eine Relation zwischen Objekten; die Intension ist ein „*Begriffsverhalt*“, eine Relation zwischen Begriffen. Dabei analysiere und kritisiere ich die Theorie, dass die Extension eines Satzes sein *Wahrheitswert* sei bzw. die Intension eines Satzes sein *Wahrheitswert in allen möglichen Welten*.

0-4 Kopula

Die Kopula ‚ist’ steht für eine zentrale, vielleicht die wichtigste Relation in der Logik: „X ist (ein) Y“. Ich zeige, dass ganz unterschiedlichen logischen Formalisierungen wie $x_i \in F$, Fx_i, $F \subset G$ und $A \rightarrow B$ im Grunde die *gleiche* Kopula-Struktur ausdrücken. Da es aber immer wissenschaftliches Ziel ist, eine möglichst *einheitliche* Darstellung zu wählen, diskutiere ich zwei Möglichkeiten: entweder *mengen-relational* nur das Teilmengen-Zeichen $\subset$ zu verwenden oder *logisch-wahrheitsfunktional* nur das Implikations-Zeichen $\rightarrow$. Im zweiten Fall ergibt sich allgemein $X \rightarrow Y$ (oder $\Phi \rightarrow \Psi$) und speziell: $x_i \rightarrow F$, $F \rightarrow G$, $A \rightarrow B$. Auch ein *Individual-Satz* wie ‚Sokrates ist ein Philosoph’ wird hier wahrheitsfunktional interpretiert, z. B. in dem Sinn: „Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt“.

0-5 Synthetische und analytische Relationen

Diese Unterscheidung ist grundlegend. Verwenden wir hier der Einfachheit halber zunächst eine *sprachliche* Interpretation. *Analytisch* ist ein Satz, bei dem das Prädikat im Subjekt bereits enthalten ist (*Tautologie*) oder aber dem Subjekt widerspricht (*Kontradiktion*); *synthetisch* ist ein Satz, bei dem das Prädikat dem Subjekt etwas Neues hinzufügt, also von ihm logisch unabhängig ist.

Ich vertrete aber die These, dass man dazwischen als Drittes *partiell analytische* Relationen bzw. Sätze unterscheiden kann. Hier fügt das Prädikat dem Subjekt *teilweise* etwas Neues hinzu. Diese Definitionen kann man auch auf Schlüsse anwenden. Z. B. unterscheide ich zwischen $X \rightarrow Y$ (synthetisch) und $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ (semi-analytisch), obwohl sich in der Wahrheitstafel dasselbe Resultat ergibt, sie also logisch äquivalent sind.

Analytische Relationen sind in *jeder* Welt gültig (Tautologie) oder in *keiner* Welt (Kontradiktion). *Partiell analytische* Relationen sind in *einigen* Welten gültig, in anderen nicht, dasselbe gilt für synthetische Relationen.

Syntaktisch kann man unterscheiden: Bei *synthetischen* Relationen findet man rechts und links vom Junktor nur *unterschiedliche* Objektzeichen ($X \rightarrow Y$), bei *partiell analytischen* Relationen findet man *partiell gleiche* Zeichen, ($X \vee Y \longrightarrow Y$), bei *streng analytischen* Relationen findet man partiell oder ausschließlich gleiche Zeichen ($X \Rightarrow X$).

Für die Implikation ergibt sich daher z. B.:

synthetisch: $X \rightarrow Y$, *partiell-analytisch* $X \vee Y \longrightarrow Y$, analytisch $X \Rightarrow X$.

1 LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

1-1 Aussagen-Logik

Die sogenannte *Aussagen-Logik* behandelt die Relationen zwischen Aussagen, deren *Struktur unberücksichtigt* bleibt. Wie gesagt geht es aber im Grunde um eine *2-wertige* Logik, die sich auf *beliebige Objekte* oder *Sachverhalte* (X, Y) beziehen kann, nicht nur auf Aussagen.

Da ich also nicht nur von *Aussagen* ausgehe, die *wahr* oder *falsch* sind, verwende ich hier nicht *w* oder *f*, sondern + (plus) für *belegt* / *gültig* oder – (minus) für *nicht belegt* / *ungültig*.

Die Relationen (Relatoren) werden durch *Wahrheitswerte* bzw. eine *Wahrheitswertetafel* definiert. Es werden die *möglichen Welten* angegeben. Bei 2 Relata – bzw. 2 Aussagen oder 2 Variablen – X und Y ergeben sich $2^2 = 4$ mögliche Welten oder logische Welten.

D. h. es wird angeben, welche *Kombinationsmöglichkeiten* von X und Y es gibt: $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$. Dann wird festgelegt, bei welchen dieser Möglichkeiten (in welcher dieser Welten) der betreffende Relator bzw. die Relation als *belegt* gilt.

Die Wahrheitswertetafeln für die wichtigsten Relatoren sind:

X Y	$\wedge$	$\vee$	><	|	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+ +	+	+	–	–	+	+
+ –	–	+	+	+	–	–
– +	–	+	+	+	+	–
– –	–	–	–	+	+	+

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ (wenn X, dann Y) mit dem Wahrheitswerte-Verlauf + – + + führt zu *Paradoxien*. Auch entspricht sie nicht der *normal-sprachlichen* Auffassung von *Wenn-dann-Sätzen*, die nämlich nur als definiert gelten, wenn das *Vorderglied belegt* (der Vordersatz wahr) ist. Daher habe ich eine veränderte Implikation, von mir *Positiv-Implikation* genannt, eingeführt, bei der nur die Fälle berücksichtigt werden, in denen *das Vorderglied gültig* ist.

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Hier unterscheidet man vor allem zwischen 4 Werten: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Also im Gegensatz zur Aussagen-Logik, die nur zwischen *positiv* (= alle) und *negativ* (= alle nicht) unterscheidet. Man spricht von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* (bzw. Existenz-Sätzen), allgemeiner kann man von *All-Relationen* und *Partikulär-Relationen* sprechen.

Die *Quantoren-Logik* erfasst die Individuen x *kollektiv*, durch *Quantoren* wie Λ = alle, V = einige; die *Prädikaten-Logik* nimmt Bezug auf die *einzelnen* Individuen x_1, x_2 usw.

Beispiele für All-Strukturen sind:

1. alle x sind F
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx)$
   Prädikaten-Logik: $Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$
2. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Problematischer ist die Formalisierung von *Partikulär*-Strukturen, z. B. die verbreitete Formel $Vx(Fx \wedge Gx)$. Diese kritisiere ich im Buchtext und schlage Alternativen vor. Außerdem ist streng zwischen „mindestens einige“ und „genau einige“ zu unterscheiden.

1-3 Quantitative Logik

Ich habe im Verlaufe vieler Jahre eine *quantitative* Logik entwickelt. Diese Logik kann hier im *Überblick* nur angedeutet werden. Für die Implikation $X \rightarrow Y$ z. B. schreibt man quantitativ $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Dies kann je nach Kontext in verschiedener Weise interpretiert werden, vor allem: „Wenn X, dann mit einer Wahrscheinlichkeit $p = r/n$ auch Y"; oder: „Die *relative Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit* von $X \rightarrow Y$ beträgt r/n". Die Berechnung vollzieht sich anhand der *Wahrheitstafel* – dabei steht q für die *absolute* Anzahl bzw. Häufigkeit.

	$X \rightarrow Y$	
1.	+ + +	$q(X \wedge Y) = a$
2.	+ – –	$q(X \wedge \neg Y) = b$
3.	– + +	$q(\neg X \wedge Y) = c$
4.	– + –	$q(\neg X \wedge \neg Y) = d$

Zur Berechnung von p dividiert man die Anzahl der *Fälle* in den +Welten (wo + unter dem Relator $\rightarrow$ steht) durch die Anzahl der Fälle in *allen* Welten. D. h. der *Nenner* ist (bei 2 Variablen) immer: $a + b + c + d$. Für $X \rightarrow Y$ ergibt sich:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

1-4 Quantitative Aussagen-Logik

Ich vertrete die Auffassung, dass die Aussagen-Logik ein *Grenzfall* der quantitativen Logik ist, wobei nur 2 Werte unterschieden werden: 1 bei *Position* und 0 bei *Negation*.
Das bedeutet:

$X \rightarrow Y$ steht für: $$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 1$$

$\neg(X \rightarrow Y)$ steht für: $$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 0$$

Man muss also unterscheiden:
1) $X \rightarrow Y$ als Struktur in der Aussagen-Logik mit *implizitem* Wert von $p = 1$ (Konstante).
2) $X \rightarrow Y$ in $p(X \rightarrow Y) = r/n$ in der quantitativen Logik, als Struktur mit unbestimmtem Wert (Variable), der erst durch p ein bestimmter Wert zugesprochen wird, und zwar in der *quantitativen Aussagen-Logik* $p = 1$ oder $p = 0$.

1-5 Quantitative Quantoren-Logik

In der Quantoren-Logik werden wie beschrieben normalerweise (inklusiv) 4 Werte unterschieden:

	bedeutet quantitativ
1. alle	$p = 1$
2. alle nicht	$p = 0$
3. einige	$p > 0$
4. einige nicht	$p < 1$

So steht z. B. „einige x sind F": $\vee x(Fx)$ für quantitativ $p(Fx) > 0$ oder vereinfacht $p(X) > 0$.
„Nicht alle F sind G": $\neg\wedge x(Fx \rightarrow Gx)$ steht z. B. für quantitativ vereinfacht $p(X \rightarrow Y) < 1$.

Als Formel ergibt sich hier: $$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$$

2 LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

2-1 Aussagen-Logik

Man kann unterscheiden:

• Streng (vollständig) analytische Relationen

- *Tautologien*: sie sind in *jeder Welt* wahr bzw. gültig. In der Wahrheitstafel steht nur + (plus) unter dem Junktor bzw. Relator. Tautologien haben den Status von Gesetzen.
- *Kontradiktionen*: sie sind in *keiner Welt* wahr, also in jeder falsch bzw. ungültig. D. h. sie sind widersprüchlich. Es steht nur – (minus) unter dem Junktor. Kontradiktionen sind natürlich weniger bedeutsam.

• Partiell analytische (semi-analytische) Relationen: sie sind in genau *einigen* Welten gültig.

Tautologische *Implikationen* formalisiere ich immer durch einen *Doppelpfeil* wie $\Rightarrow$ (andere tautologische Relationen durch hochgestelltes $^{++}$).

Kontradiktorische *Implikationen* formalisiere ich durch den durchgestrichenen Doppelpfeil wie $\nRightarrow$ (sonst hochgestelltes $^{--}$).

Semi-analytische *Implikationen* kennzeichne ich durch den verlängerten Pfeil $\longrightarrow$ (andere Relationen durch hochgestelltes $^{+-}$).

Analytische Implikation

• *Tautologie*

Z. B. $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$ (Modus ponendo ponens)

Der Pfeil $\Rightarrow$ steht für die tautologische (analytische) Implikation. Der Werteverlauf in der Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator $\Rightarrow$ lautet: + + + +.

• *Kontradiktion*

Z. B. $(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow (X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

Eine Implikation kann nur dann kontradiktorisch sein, wenn das Vorderglied eine *Tautologie* und das Nachglied eine *Kontradiktion* ist. Der Wahrheitsverlauf lautet: – – – –.

• *Partiell Analytische Implikation*

Z. B. $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$. Wahrheitsverlauf: + + + –.

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist zwar *logisch äquivalent* einer *synthetischen* Relation wie $X \vee Y$.

Aber ich werde versuchen zu zeigen, dass diese Ausdrücke weder *extensional* noch *intensional* gleich sind. Dabei darf man allerdings nicht der verbreiteten Theorie folgen, nach der die *Intension* die *Extension* in allen möglichen Welten, entsprechend der Wahrheitstafel, ist.

2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Natürlich gelten hier zunächst alle Gesetze der *Aussagen-Logik.*

Z. B. entsprechend zum aussagen-logischen $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$ gilt quantoren-logisch:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$ bzw. allgemeiner $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow \Lambda(Y)$.

Aber es gelten eben auch *spezielle* Gesetze, die nur in der Quantoren- bzw. Prädikaten-Logik zu formulieren sind, nicht in der Aussagen-Logik. Die wichtigsten werden im *logischen Quadrat* dargestellt.

$$\begin{array}{ccc} \text{alle} & ^{+}|^{+} & \text{alle}\neg \\ \Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\ \text{einige} & ^{+}\vee^{+} & \text{einige}\neg \end{array}$$

2-3 Quantitative Logik
Auch hier beschränke ich mich in diesem Überblick wieder auf *Schlüsse* bzw. *analytische Implikationen*.

Beispiel: *Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)*
- qualitative Form: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$
- Bruch-Form: $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n} \quad s \geq r$

Kurz-Erläuterung: Wenn c = 0, haben beide Brüche den gleichen Wert. Wenn c > 0, hat der zweite Bruch einen höheren Wert. Bei der Ungleichung ergeben sich folgende (n – r + 1) Lösungen: s = r, r + 1, …, n. Also: p(Y) = r/n, (r + 1)/n, ... , n/n

2-4 Quantitative Aussagen-Logik
Hier geht es um Schlüsse zwischen *quantitativen* Relationen bzw. Aussagen, die den Wert p = 1 oder p = 0 haben. Solche Strukturen kann man auch *deterministisch* nennen, dagegen nennt man Strukturen mit dem Wert $0 < p < 1$ *statistisch*.

Beispiel: *Abtrennungsregel (deterministisch)*
- qualitative Form: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
- Bruch-Form: $\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a > 0, b + c + d = 0. Es haben also alle Parameter außer a den Wert 0. Damit ergibt sich für den abgeleiteten Bruch: $\frac{a}{a} = 1$

2-5 Quantitative Quantoren-Logik
Hier geht es um Schlüsse zwischen Relationen (Aussagen, Prämissen), die folgende p-Werte haben: 1, < 1, 0, > 0 (während die quantitative *Aussagen*-Logik nur p = 1 und p = 0 kennt).

Beispiel: *Modus ponendo ponens* - analog
- quantoren-logische Form: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow V(Y)$
- quantitative Form : $p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$
- Bruch-Form: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0. Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0. Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: a > 0.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert p > 0.
Bezüglich *exklusiv* / *inklusiv* gilt: *genau* einige (exklusiv) ⇒ *mindestens* einige (inklusiv).

quantitativ: $0 < p(X) < 1 \Rightarrow p(X) > 0$

Das beruht auf folgenden Definitionen:
Mindestens einige x sind F: Vx(Fx). Heißt quantitativ: p(Fx) > 0, vereinfacht: p(X) > 0
Genau einige x sind F: ∃x(Fx). Heißt quantitativ: 0 < p(Fx) < 1, vereinfacht: 0 < p(X) < 1

3 META-LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

Meta-Werte sind Werte, die sich auf andere Werte (*Objekt-Werte*) beziehen. Der wichtigste Meta-Wert ist die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T, die sich insbesondere auf die *empirische* Wahrscheinlichkeit p bezieht. Z. B. wie hoch ist p^T, wenn $p(X \rightarrow Y) = r/n$? Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich eine Relation ist, allein auf Grund der möglichen *Kombinationen*, also der logischen Welten bzw. der numerischen Fälle.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt aber zugleich den *Grad der theoretischen Wahrheit* an, d. h. den *Tautologie-Grad* einer Relation. Und der Umkehrwert von p^T, also $(1 - p^T)$, gibt den *Informations-Gehalt* an. p^T nimmt dabei (wie p) Werte zwischen 0 und 1 an.

Es wurde bereits unterschieden zwischen *synthetischen*, *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen bzw. Strukturen. Man kann für alle diese Relationen (seien sie qualitativ oder quantitativ) die theoretische Wahrscheinlichkeit berechen und sie danach differenzieren. D. h., dass man – anders als es sonst dargestellt wird – auch für *synthetische* Relationen einen Tautologie-Grad berechen kann (der allerdings immer > 0 und < 1 ist).

p^T	Modalität	Tautologie-Status	Analytischer Status	Beispiel
$p^T = 1$	notwendig (sicher)	tautologisch	analytisch	$X \vee \neg X$
$p^T = 0$	unmöglich	kontradiktorisch	analytisch	$X \wedge \neg X$
$0 < p^T < 1$	(genau) möglich	partiell tautologisch	partiell analytisch	$X \wedge X$
		partiell tautologisch	synthetisch	$X \wedge Y$

3-1 Aussagen-Logik

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über (synthetische) Strukturen der Aussagen-Logik:

Beispiele	Wahrheits-werte	p^T
$X \rightarrow Y$	+ – + +	3/4 = 0,75
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +	2/4 = 0,5
$X \wedge Y$	+ – – –	1/4 = 0,25

Der Wert p^T gibt an, wie wahrscheinlich ein Satz bzw. eine Relation allein von der Form her ist. Man berechnet p^T vereinfacht durch folgende Division:

$$\frac{\text{Anzahl der Welten, in denen die Struktur gültig ist (+)}}{\text{Anzahl aller möglichen Welten (+ und –)}}$$

3-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

In der traditionellen Quantoren-Logik werden, wie beschrieben, 4 Quantitäten unterschieden: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Diese werden mit 2 *Quantoren* (Λ, V) formalisiert: Λ, Λ¬, V, V¬. Z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ für den *All-Satz*.

Nun ist es nicht möglich, einem solchen Satz (bzw. einer solchen Relation) direkt eine theoretische Wahrscheinlichkeit p^T zuzuweisen, weil zur Bestimmung von p^T die *absolute* Quantität benötigt wird, also die *relative* Quantität, hier *alle* = 100%, nicht ausreicht. Es ist jedoch möglich, eine Berechnung vorzunehmen, wenn man den *quantoren-logischen* Ausdruck in einen *prädikaten-logischen* umformt. Z. B.:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Bestimmung von p^T (theoretische Wahrscheinlichkeit bzw. tautologischer Grad):

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$$

3-3 Quantitative Logik

Bei den quantitativen Relationen muss man zur Berechnung von p^T modifiziert vorgehen: Zunächst *addiert* man, wie schon beschrieben, die *Fälle*, die in den *belegten* Welten der Relation vorkommen (z. B. bei $X \to Y$ ist das: a + c + d) und *dividiert* sie durch *alle* Fälle in *allen* Welten, bei 2 Variablen: a + b + c + d.

So erhält man die Formel für die *empirische* Wahrscheinlichkeit p.

Z. B. für $p(X \to Y)$ ist das: a + c + d / a + b + c + d = r/n, anders geschrieben:

$$p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Für diese Verteilung berechnet man die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T.

p^T ergibt sich nun nach folgender Formel der *Binomial-Verteilung* (die Herleitung erfolgt im Text):

$$p^T[p(X \to Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$$

Wenn man sich z. B. die Frage stellt: Welchen Wert hat $p(X \to Y)$ am wahrscheinlichsten (bei n = 5)? Dann kann man antworten:

Am relativ wahrscheinlichsten ist $p(X \to Y) = 4/5$, denn dafür besteht die höchste theoretische Wahrscheinlichkeit, nämlich $p^T = 405/1024 = 0{,}4$. Somit hat $p(X \to Y) = 4/5$ auch den höchsten *Tautologie-Grad* – im Vergleich mit $p(X \to Y) = 5/5, 3/5, 2/5, 1/5$ oder $0/5$.

3-4 Quantitative Aussagen-Logik

Die Aussagen-Logik unterscheidet wie gesagt (quantitativ betrachtet) nur 2 Möglichkeiten, p = 1 und p = 0.

Ich möchte mich hier auf den negativen Fall p = 0 der *Implikation* beschränken:

Für $p(X \to Y) = r/n = 0$ gilt: $r = 0$

Für die Formel $p^T[p(X \to Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$ bedeutet das:

$p^T[p(X \to Y) = 0] = 1 \times 1 \times 1/4^n = 1/4^n$

3-5 Quantitative Quantoren-Logik

Die quantitative Quantoren-Logik behandelt, anders als die quantitative Aussagen-Logik, nicht nur p = 1 und p = 0, sondern auch p < 1 und p > 0.

Als Beispiel-Fall „einige X sind Y“: $p(X \to Y) > 0$ („einige sind“ hier mit $\to$ formalisiert)

Laut obiger Formel (in 3-4) gilt:
$p^T[p(X \to Y) = 0] = 1/4^n$.
Somit gilt: $p^T[p(X \to Y) > 0] = 1 - 1/4^n = (4^n - 1)/4^n$.
Denn es muss ja gelten:
$p^T[p(X \to Y) = 0] + p^T[p(X \to Y) > 0] = 1$.
Und: $1/4^n + (4^n - 1)/4^n = 1$

Dazu muss man sich klarmachen: Wenn p > 0, werden ja alle Werte außer 0 erfasst.
0 und > 0 bilden also eine *vollständige Disjunktion*, einen *kontradiktorischen Gegensatz*. Somit ergibt sich $p^T[p(X \to Y) > 0]$ als Umkehrwert von $p^T[p(X \to Y) = 0]$.

4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

4-1 Aussagen-Logik

• *Vollständig* analytische Relationen sind wie beschrieben *Tautologien* oder *Kontradiktionen*.
- Tautologien: $p^T = 1$ bzw. bezogen auf 2 Variablen / 4 Welten: $p^T = 4/4$.
- Kontradiktionen: $p^T = 0$ bzw. bezogen auf 2 Variablen / 4Welten: $p^T = 0/4$.

p^T gibt den *Grad der Tautologie* bzw. bei der Implikation den *Grad der logischen Folge* an.

- *Tautologie*, z. B. Modus ponendo ponens: $p^T[(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y] = 4/4 = 1$

- *Kontradiktion*:

Eine kontradiktorische Implikation liegt nur vor, wenn das Vorderglied *tautologisch* und das Nachglied *kontradiktorisch* ist. $p^T[(X {}^{+}\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X {}^{-}\wedge^{-} \neg X)] = 0/4 = 0$

• *Partiell-analytische Implikation:* $0 < p^T < 1$ bzw. $0/4 < p^T = 4/4$

Hier liegt nur eine partielle logische Folge vor. Z. B.:

$$p^T[(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)] = 3/4 = 0{,}75$$

$$p^T[(X \wedge Y) \longrightarrow (X \vee Y)] = 2/4 = 0{,}5$$

$$p^T[(X / Y) \longrightarrow (X \wedge Y)] = 1/4 = 0{,}25$$

4-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Ich will mich auch hier auf einige Implikations-Beispiele beschränken.

- *Tautologie*

Schluss vom All-Satz auf den Partikulär-Satz

$p^T[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] = 1$ bzw. $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

- *Kontradiktion*

Schluss vom All-Satz auf den negierten Partikulär-Satz

$p^T[\Lambda x(Fx) *\!\not\Rightarrow \neg Vx(Fx)] = 0$

(so gilt der Schluss *nur* mit der *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$, wie im Text erläutert wird)

- *partiell analytische Implikation*

• Für $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ gilt: $p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] > 0 \wedge < 1$

„Wenn *einige* Objekte x die Eigenschaft F haben, dann haben *alle* x die Eigenschaft F“. Dieser Schluss ist *nicht kontradiktorisch*, aber offensichtlich auch *nicht streng folgerichtig*, daher gilt: $0 < p^T < 1$. Man kann p^T auch genauer berechnen, wenn man (wie schon beschrieben) eine *prädikaten-logische* Umformung vollzieht:

$$p^T[(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$$

• Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ gilt: $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] > 0 \wedge < 1$

Dieser zweite Fall ist besonders interessant. Denn in dieser Weise werden All-Sätze und Partikulär-Sätze (Existenz-Sätze) meistens formalisiert. Es zeigt sich, dass *so* aus „alle F sind G“ nicht sicher folgt „einige F sind G“, obwohl dies i. allg. als sichere Folge gilt. Nach einer prädikaten-logischen Umformulierung kann man wieder eine genaue Formel aufstellen:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)] = (4^n - 2^n)/4^n$$

4-3 Quantitative Logik
In diesem Punkt konzentriere ich mich auf Schlüsse mit der *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$.

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)
- qualitative Basis: $X \wedge Y \ * \!\Rightarrow \ Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n \ * \!\longrightarrow \ p(Y) = s/n$
- Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \quad * \!\longrightarrow \quad \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

Es gilt: $s = r, r + 1, r + 2, \ldots, n$. Also: $r \leq s$

Um nun zu berechnen, wie wahrscheinlich – bei vorgegebenem $p(X \wedge Y)$ – ein bestimmter Wert von $p(Y)$ ist, d. h. um den *Grad der logischen Folge* zu berechnen, habe ich folgende Formel entwickelt (dabei wird hier die semi-analytische Implikation $*\!\longrightarrow$ verwendet):

$$p^T[(p(X \wedge Y) = r/n \ * \!\longrightarrow \ p(Y) = s/n] = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$$

4-4 Quantitative Aussagen-Logik
Wieder die Abtrennungsregel, ein Schluss, dessen qualitative Basis *vollständig* analytisch ist:

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)
- qualitative Basis: $X \wedge Y \ * \!\Rightarrow \ Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n = 1 \ * \!\Rightarrow \ p(Y) = s/n = 1$
- Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \quad * \!\Rightarrow \quad \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Ich gebe hier ein Zahlenbeispiel: $(X \wedge Y) = 4/4 \ * \!\Rightarrow \ p(Y) = 4/4$, also: $r = 4$, $n = 4$, $s = 4$.

Nach obiger Formel (in 4-3) ergibt sich:

$$p^T[(p(X \wedge Y) = 4/4 \ * \!\Rightarrow \ p(Y) = 4/4] =$$

$$\binom{4-4}{4-4}(2/3)^{4-4}(1/3)^{4-4} = 1 \times (2/3)^0 \times (1/3)^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Der Schluss hat also eine Wahrscheinlichkeit $p^T = 1$, er ist somit *vollständig tautologisch*.

4-5 Quantitative Quantoren-Logik
Einige Beispiele mit *normaler Implikation* und mit *Positiv-Implikation*:
- *Tautologie:*

alle $\Rightarrow$ einige	$p^T[p(X) = n/n = 1 \ \Rightarrow \ p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$
alle $\Rightarrow$ einige	$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \ \Rightarrow \ p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (4/4)^n$

- *Semi-analytischer Schluss*:

einige $\longrightarrow$ alle	$p^T[p(X) > 0/n \ \longrightarrow \ p(X) = n/n = 1] = 1/2^{n-1}$
einige $*\!\longrightarrow$ alle	$p^T[p(X) > 0/n \ * \!\longrightarrow \ p(X) = n/n = 1] = 1/(2^n - 1)$
alle $\longrightarrow$ einige	$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n] = (4^n - 2^n)/4^n$